Tentamen Calculus I, 29 augustus 2007, 14:00–17:00.

Schrijf op elk in te leveren blad je naam, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Alle (negen) opgaven tellen even zwaar. Het gebruik van boek(en), aantekeningen of een grafische rekenmachine is bij dit tentamen niet toegestaan.

(1) Toon aan dat voor elke $x \geq 0$ en voor elk geheel getal $n \geq 0$ geldt, dat $(1+2x)^n \geq 1 + 2nx + 2(n^2 - n)x^2$.

(2) Bewijs gebruik makend van de ϵ-δ definitie, dat $f(x) = x^2+x-2$ continu is in $x = 1$.

(3) Geef (met uitleg!) een voorbeeld van een functie die wel continu maar niet differentieerbaar is in $x = 0$.

(4) Bepaal $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sqrt{1+2x}}{\sin^2(x)}$.

(5) Ongeveer 200 jaar geleden werkte Gauss aan schattingen voor het aantal priemgetallen onder een grens x. Daarbij zijn twee functies belangrijk: $p(x) = x/\ln(x)$ en $q(x) = e + \displaystyle\int_e^x \frac{dt}{\ln t}$. Bepaal p' en q' en beredeneer dat $p(x) \leq q(x)$ voor $x \geq e$.

(6) Bepaal een primitieve van $\cosh(x) \cdot \sinh(x)$.

(7) Bereken $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x^4 + 9x^2}\, dx$.

(8) De functie $y(x) = x$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(x^3 - x^2)y' = (1-2x)y + x^2 - x^3.$$

Vind nog een andere oplossing van deze vergelijking.

(9) Bepaal de booglengte van de grafiek van $f(x) = \dfrac{1}{12x} + x^3$ tussen $x = 1$ en $x = 2$.